微分積分演習（戸瀬信之）—期末試験（03 年 07 月 12 日）

(I) 関数

$$y = t^2 \log t$$

の増減表を求めよ。

(II) 関数

$$y = te^{-t^2}$$

の増減表を求めよ。

(I) y の導関数と第 2 次導関数を計算すると

$$y' = 2t\log t + t^2 \cdot \frac{1}{t} = 2t\log t + t = 2t(\log t + \frac{1}{2})$$

$$y'' = 2(\log t + \frac{1}{2}) + 2t \cdot \frac{1}{t} = 2(\log t + \frac{3}{2})$$

を得る。$t > 0$ より、y' の符号は $\log t + \frac{1}{2}$ の符号と一致するから

$$y' \gtreqless 0 \Leftrightarrow t \gtreqless e^{-\frac{1}{2}}$$

である。y'' の符号については

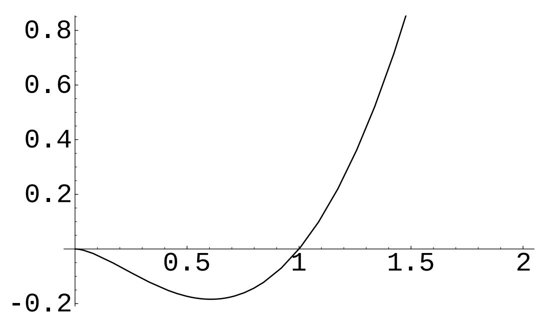
$$y'' \gtreqless 0 \Leftrightarrow t \gtreqless e^{-\frac{3}{2}}$$

が成立する。以上から増減表は

t	(0)		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
y'	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	(0)	↘	$-\frac{3}{2}e^{-3}$	↘	$-\frac{1}{2}e^{-1}$	↗

となる。

（参考） Mathematica によるグラフは次のようになる。



極限についても解説しておこう。$t \to +\infty$ のとき $t^2 \to +\infty$、$\log t \to +\infty$ であるので

$$t^2 \log t \longrightarrow +\infty$$

が分かる。他方、$t \longrightarrow +0$ のとき $s = -\log t \to +\infty$ であるので $2s \longrightarrow +\infty$ である。このことから

$$t^2 \log t = e^{-2s}(-s) = -\frac{s}{e^{2s}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{e^{2s}} \longrightarrow 0$$

が従う。

(II) y の導関数と第 2 次導関数を計算すると

$$y' = e^{-t^2} + t \cdot e^{-t^2}(-2t) = (1-2t^2)e^{-t^2}$$

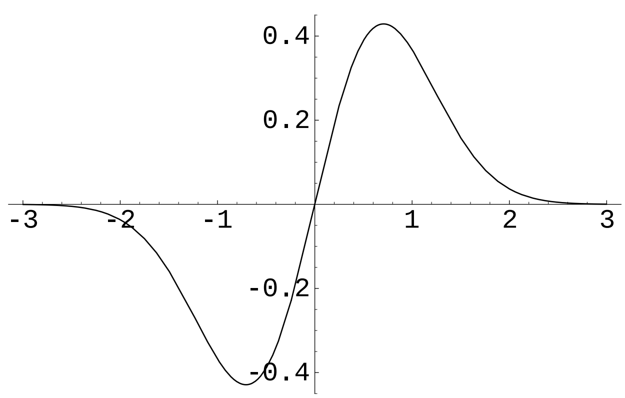
$$y'' = (-4t)e^{-t^2} + (1-2t^2)e^{-t^2}(-2t) = 2t(2t^2-3)e^{-t^2}$$

となる。$e^{-t^2} > 0$ より y' の符号は $1-t^2$ の符号と一致し、y'' の符号は $t(2t^2-3)$ の符号と一致する。このことから増減表は

t		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	$\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘

となる。

（参考） Mathematica によるグラフは次のようになる。



極限についても解説しておこう。$t \to \pm\infty$ のとき $t^2 \longrightarrow +\infty$ であるので

$$t^2 e^{-t^2} = \frac{t^2}{e^{t^2}} \longrightarrow 0$$

が従う。このことから

$$te^{-t^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2}{e^{t^2}} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$$

を得る。ここで $t \longrightarrow \pm\infty$ のとき

$$\frac{1}{t} \longrightarrow 0$$

を用いた。

(III) 制約条件

$$g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

の下で、関数

$$z = f(x,y) = x + y$$

の停留点を求めよ。

(III) g と f の偏導関数を求めると

$$g_x = 4x, \quad g_y = 2y$$

$$f_x = f_y = 1$$

と計算される。Lagrange の条件から、極値をとる点 (x,y) において

$$1 = \lambda \cdot 4x \tag{2}$$

$$1 = \lambda \cdot 2y \tag{3}$$

が成立する。これから

$$4\lambda x = 2\lambda y$$

が必要条件である。(2) から $\lambda \neq 0$ が成立するので、この条件から

$$2x = y$$

が従う。これを(1) に代入して

$$2x^2 + 4x^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

を得る。$y = 2x$ より、それぞれの場合に $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ も分かる。以上で得た

$$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

は $\lambda = \pm\frac{3}{2\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$ で(2) と(3) を満たす。

(IV) 曲線

$$g(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$$

の $(1,2)$ における接線を求めよ。

(V) 曲面

$$z = \frac{y}{1+x^2}$$

の $(0,0,0)$ における接平面を求めよ。

(IV) 一般に、曲線 $g(x,y)=0$ を通る点 (a,b) における接線は

$$g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b) = 0$$

で与えられる。

関数 g の偏導関数を求めると

$$g_x = 2x - 3y, \quad g_y = -3x + 2y$$

であるので、$(1,2)$ における偏微分係数は

$$g_x(1,2) = 2 - 3 \cdot 2 = -4, \quad g_y(1,2) = -3 + 2 \cdot 2 = 1$$

である。従って、求める接線は

$$-4(x-1) + 2(y-2) = 0$$

となる。

(V) 一般に、曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面は

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

で与えられる。

関数 f の偏導関数は

$$f_x = -\frac{y}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \quad f_y = \frac{1}{1+x^2}$$

と計算されるので、$(0,0)$ における偏微分係数は

$$f_x(0,0) = 0,\ f_y(0,0) = 1$$

となる。このことから、求める接平面は

$$z = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \quad \text{すなわち} \quad z = y$$

であることが分かる。