# 線形代数試験問題（２００２年度後期）

**I** 3 次元ベクトル $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ , $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ をとる。

**(1)** $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V := \{x\vec{v}_1 + \vec{v}_2;\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

の正規直交基底を求めよ。

**(2)** $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の $V$ への正射影を求めよ。

**II** 連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +2x_4 & = 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & +4x_4 & = 5 \\ -x_1 & +7x_2 & +6x_3 & & = 7 \\ & 3x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = -15 \end{cases}$$

を解け。

**III** 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

が対称行列であることに注意しよう。

**(1)** $A$ を直交行列によって対角化せよ。

**(2)** $x^2 + y^2 = 1$ の下で

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

の最大値を求めよ。

[**注意：**] この問題は、2003 年度の講義では扱わなかった内容です。

**IV (A)** または **(B)** を選択して答えよ。

**(A)** 行列

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 48 & -14 \\ -1 & 9 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して $\lambda I_3 - A$ が正則となる $\lambda$ の条件を求めよ。

**(B)** 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

に対して、$A^n$ を求めよ。