演習（線形代数）期末試験解説

I 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ。

行列 $(A|I_4)$ を行基本変形して階段行列にする。

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -ab & 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & abc & 1 & -a & ab & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -bc & 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & ab & -abc \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b & bc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで (1)、(2)、(3) は行基本変形

(1) 2 行の $(-a)$ 倍を 1 行に加える
(2) 3 行の ab 倍を 1 行に加える
　　3 行の $(-b)$ 倍を 2 行に加える
(3) 4 行の $(-abc)$ 倍を 1 行に加える
　　4 行の bc 倍を 2 行に加える
　　4 行の $(-c)$ 倍を 3 行に加える

に対応する。

II 行列

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 48 & -14 \\ -1 & 9 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して $\lambda I_3 - A$ が正則でないための必要十分条件を求めよ。

求める条件は

$$\det(\lambda I_3 - A) \neq 0$$

と同値であるので、この行列式を計算する。

$$
\begin{aligned}
|\lambda I_3 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+4 & -48 & 14 \\ 1 & \lambda-9 & 2 \\ 1 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \lambda-9 & 2 \\ \lambda+4 & -48 & 14 \\ 1 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & \lambda-9 & 2 \\ 0 & -(\lambda-9)(\lambda+4)-48 & -2(\lambda+4)+14 \\ 0 & 5-\lambda & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & \lambda-9 & 2 \\ 0 & -(\lambda^2-5\lambda+12) & -2(\lambda-3) \\ 0 & 5-\lambda & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -(\lambda^2-5\lambda+12) & -2(\lambda-3) \\ 5-\lambda & \lambda-3 \end{vmatrix} = -(\lambda-3) \begin{vmatrix} -(\lambda^2-5\lambda+12) & -2 \\ 5-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

と計算されるので、求める条件は $\lambda = 1, 2, 3$ である。

III 次の連立 1 次方程式の解を求めよ。

$$
\begin{cases}
x_1 \; -2x_2 \; +3x_4 = 2 \\
x_1 \; -2x_2 \; +x_3 \; +2x_4 \; +x_5 = 2 \\
2x_1 \; -4x_2 \; +x_3 \; +5x_4 \; +2x_5 = 5
\end{cases}
$$

拡大行列を行基本変形して階段行列に変形すればよい。

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

と計算されることから、与えられた方程式は

$$
\begin{cases}
x_1 \; -2x_2 \; +3x_4 = 2 \\
x_3 \; -x_4 = -1 \\
x_5 = 1
\end{cases}
$$

と同値であることが分かる。ここでピボットのない列に対応する変数 x_2 と x_4 を

$$x_2 = \alpha.\ x_4 = \beta$$

と置くと

$$\begin{cases} x_1 &= 2\alpha - 3\beta \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \beta - 1 \\ x_4 &= \beta - 1 \\ x_5 &= 1 \end{cases}$$

と計算される。(1)、(2)、(3) は行基本変形

(1)　1 行の (-1) 倍を 2 行に加える
　　1 行の (-2) 倍を 3 行に加える
(2)　2 行の 1 倍を 3 行に加える
(3)　3 行の (-1) 倍を 2 行に加える

に対応する。

IV 次の連立 1 次方程式が解を持つ条件を求めよ。ただ一つの解を持つ条件を求めよ。

$$\begin{cases} x & +y & -z & =1 \\ 2x & +3y & +cz & =3 \\ x & +cy & +3z & =2 \end{cases}$$

方程式に対応する拡大行列を階段行列に変形する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & c & 3 \\ 1 & c & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \\ 0 & c-1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(c+3)(c-2) & -(c-2) \end{array}\right)$$

ここで (1)、(2) は行基本変形

(1)　1 行の (-2) 倍を 2 行に加える
　　1 行の (-1) 倍を 3 行に加える
(2)　2 行の $-(c-1$ 倍を 3 行に加える

に対応する。

係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & c \\ 1 & c & 3 \end{pmatrix}$$

の階数 (rank) については

$$\mathrm{rank}(A) = \begin{cases} 3 & (c \neq -3,\ 2) \\ 2 & (c = -3,\ 2) \end{cases}$$

が成立する。$\mathrm{rank}(A) = 3$ のときは、係数行列の階数と拡大行列の階数が一致するので解が存在する。しかも、変数の個数と係数行列の階数が一致するので、解は一意である。

次に、$\mathrm{rank}(A) = 2$ が成立する $c = -3$ と $c = 2$ の場合を別個に考えよう。
$c = 2$ のときは、拡大行列が

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となり、係数行列の階数が一致するので、解が存在する。$c = -3$ のときは拡大行列が

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

となるが、第 3 行の意味する方程式

$$0x + 0y + 0z = 5$$

には解が存在しない。
　以上で、解が存在する条件は

$$x \neq -3$$

であり、一意解が存在する条件は

$$x \neq -3,\ 2$$

であることを示した。
　この問題で用いた定理を最後にまとめておこう。

定理　$m \times n$ 行列 A と $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、連立方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

が解を持つ必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|\vec{b})$$

が成立することである。さらに、解が存在するとき、その解が一意である必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

が成立することである。