微分積分演習（7月5日）

> (I)　関数
>
> $$z = f(x, y) = x^3 - 9xy + y^3$$
>
> の停留点を求めましょう。

まず f の偏導関数を求めると

$$g_x = 3x^2 - 9y, \quad g_y = 3y^2 - 9x$$

となります。従って、f の停留点は

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x = \frac{1}{3}y^2 \end{cases}$$

を満たす点 (x, y) です。$y = \frac{1}{3}x^2$ を $x = \frac{1}{3}y^2$ に代入して y を消去すると

$$x = \frac{1}{3^3}x^4 \text{ すなわち } x^4 - 27x = 0$$

$= x(x^3 - 27)$

を得ます。

$$x^4 - 27x = x(x^3 - 3^3) = x(x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

から、$x = 0$ または $x = 3$ であることが従います。これを $y = \frac{1}{3}x^2$ に代入すると、それぞれ $y = 0$ と

$$\begin{cases} x = 0 \rightsquigarrow y = 0 \\ x = 3 \rightsquigarrow y = 3 \end{cases}$$

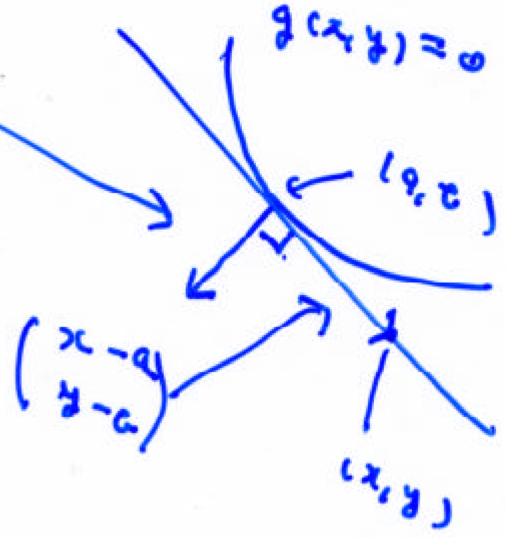
(II) $z = f(x, y)$ の $(a, b, f(a, b))$ の
接平面

$$z = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + f(a, b)$$

(III) $g_x(a, b)(x-a) + g_y(a, b)(y-b) = 0$

$$\nabla(g)_{(a,b)} = \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

nabla



$y=3$となります。以上で停留点は

$$(x,y)=(0,0),\quad (3,3)$$

となります。

> (II) 曲面
>
> $$z=\frac{y}{1+x^2}$$
>
> の$(1,2)$における接平面を求めてください。

関数$f(x,y)=\frac{y}{1+x^2}$の偏導関数を求めると

$$f_x=y\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\quad f_y=\frac{1}{1+x^2}$$

を得ます。これに$(x,y)=(0,0)$を代入すると

$$f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=1$$

を得ます。以上の計算から、求める接平面は

$z=0\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)+0$ すなわち $z=y$

を得ます。

> (III) 曲線
>
> $$g(x,y)=x^2y+y^3-10=0$$
>
> の$(1,2)$における接線を求めてください。

$g(x,y)=0$ の (a,b)における接線

$g_x(a,b)(x-a)+g_y(a,b)(y-b)=0$

gの導関数は

$$g_x = 2xy,\ g_y = x^2 + 3y^2$$

と計算されて

$$g_x(1,2) = 4,\ g_y(1,2) = 13$$

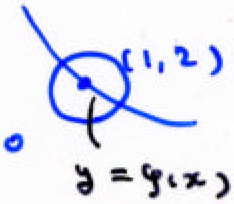
を得ます。これから

$$4(x-1) + 13(y-2) = 0$$

と接線の方程式が計算されます。

$g = x^2y + y^3 - 10 = 0$

(別の計算法)　上の計算にあるように



$g_y = x^2 + 3y^2$　$1+3=4 \neq 0$

$$g_y(1,2) \neq 0$$

となりますから、陰関数の定理を用いると、曲線$g(x,y) = 0$は$(1,2)$の周りで$y = \varphi(x)$と解けます。このことから

$x^2y + y^3 - 10 = 0$　← $x=1$に成立

$(\varphi^2)' = 2\varphi\varphi'$

$$x^2\varphi(x) + \varphi(x)^3 - 10 \equiv 0$$

が成立します。この両辺をxで微分すると

$$2x\varphi(x) + x^2 \cdot \varphi'(x) + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) = 0 \quad (5)$$

が成立します。これに$x = 1$と$\varphi(1) = 2$を代入すると

$\varphi'(x^2 + 3\varphi^2) = -2x\varphi \rightsquigarrow \varphi' = \dfrac{-2x\varphi}{x^2+3\varphi^2}$

$$2 \cdot 2 + 1^2\varphi'(1) + 3 \cdot 2^2 + \varphi'(1) = 0$$

$2\varphi + 2x\varphi' + 2x\varphi' + x^2\varphi'' + 6\varphi(\varphi')^2 + 3\varphi^2\varphi'' \equiv 0$

から

$$\varphi'(1) = -\frac{4}{13}$$

を得ます。これから求める接線の方程式は

$$y = -\frac{4}{13}(x-1)+2$$

となります。

(補足) 上の計算において$\varphi''(1)$を求めてみましょう。
(5)をさらにxで微分すると

$$2\varphi+2x\varphi'+2x\varphi'+x^2\varphi''+6\varphi(\varphi')^2+3\varphi^2\varphi''=0$$

すなわち

$$2\varphi+4x\varphi'+6\varphi(\varphi')^2+(3\varphi^2+x^2)\varphi''=0$$

を得ます。これから

$$\varphi''(x) = -\frac{2\varphi+4x\varphi'+6\varphi(\varphi')^2}{3\varphi^2+x^2}$$

を得ます。これに$x=1$を代入します。

$g(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2$

とおく

Ⅰ　$z = g(x,y)$ の停留点を求める.

Ⅱ　$g(x,y) = 0$ を解いて $y = \varphi(x)$ とする.

　φ' を x と $\varphi(x)$ で

　φ'' を x と φ と φ' で表せ.

Ⅲ　$g(x,y) = 0$ の下で $z = x^2 + y^2$ の極値問題を考える. 停留点を求める.

Ⅲ

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \end{cases}$$

を解く

ヒント　λ を消す.

$A = B\lambda$ … ①

$C = D\lambda$ … ②

①$\times D$ − ②$\times B$ を考える