

I (1) 実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

正交行列 Q を用いて対角化せよ。

(2) $\|\vec{x}\|^2 = 1$ の下で $2 = (A\vec{x}, \vec{x})$

$$(A\vec{x}, \vec{x})$$

の最大値と最小値を求めよ。

II A は $m \times n$ 行列とせよ。 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(AA^T \vec{x} = \vec{0} \implies A\vec{x} = \vec{0})$$

を示せ。 $\epsilon = 1$ $\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x}, A\vec{x}) = \dots$

III

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

の固有値を求めよ ($a=1$ の場合も含めて)

IV $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 8 & 1 & 5 \\ -5 & -2 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & -14 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

に対して $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A)$ の基底を求めよ。