1月12日 線形代数ミニテスト 解答

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ に対して $\det(\lambda I_3 - A)$ を計算せよ.

(2) $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ を満たす λ に対して $\mathrm{Ker}(\lambda I_3 - A)$ の基底を求めよ.

(1)
$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-(\lambda-3)^2 & 2+2(\lambda-3) \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2-2(\lambda-3) & \lambda-6+4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -(\lambda-2)(\lambda-4) & 2(\lambda-2) \\ -2(\lambda-2) & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

(2) $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda = 2$ または $\lambda = 8$. である.

$\lambda = 2$ のとき

$$2I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形される. このことから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(2I_3 - A) \iff x - y - 2z = 0$$

を得る. よって $\mathrm{Ker}(2I_3 - A)$ に属するベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される. これに加えて

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は線型独立である. 以上で

$\mathrm{Ker}(2I_3 - A)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる.

<u>$\lambda = 8$ のとき</u>

$$8I_3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \leftrightarrow 3r} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times = \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3r += 1r \times (-5)]{2r += 1r \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r += 2r \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r \times = \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(8I_3 - A) \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$

を得る. $\mathrm{Ker}(8I_3 - A)$ のベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表される. $\mathrm{Ker}(8I_3 - A)$ の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$