確率論入門I 最終レポート問題

I

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

とする。

(1) 確率変数 X と Y は独立で

$$X \sim \varphi_0(x), \quad Y \sim \varphi_1(y)$$

とするとき、$Z = X + Y$ の確率密度函数 $\varphi_2(z)$ を求めよ。

(2) 確率変数 X と Y は独立で

$$X \sim \varphi_0(x), \quad Y \sim \varphi_2(y)$$

とするとき、$Z = X + Y$ の確率密度函数 $\varphi_3(z)$ を求めよ。

II 次の確率密度函数 $p(x)$ を持つ確率変数 X に対して k 次のモーメント $E[X^k]$ を計算せよ。

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 1) \end{cases}$$

III $|\rho| < 1$ とする。

$$Q(x,y) := \frac{1}{1-\rho^2} \cdot (x^2 - 2\rho xy * y^2)$$

に対して

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{Q}{2}}$$

と定める。

(1)

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy$$

を計算せよ。

(2)

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} xyf(x,y)dxdy$$

を計算せよ。

(3)

$$\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx$$

を計算せよ。